UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR **Trimestre: Ene-Mar 2010**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
MATEMÁTICA I (MA-1111)
Fecha de publicación: 13/01/10
Contenido para el parcial: I

PRÁCTICA DE LA SEMANA 1

Contenidos

- Propiedades de los números reales.
- Desigualdades y valor absoluto.
- Lógica

Ejercicios a resolver en la práctica

1. Simplifica la expresión $|a^2 - 2a|$, $a \in R$, sin utilizar el símbolo da valor absoluto, estudiando los diferentes casos posibles.

2. Resuelve en el conjunto de los números reales la inecuación $|x^2 - 10| < 8$.

3. Resuelve en el conjunto de los números reales la inecuación $|5x - 25| - 6x + 1 \leq |3 - x|$

4. Determina los valores que debe tomar *x* para que $q(x)$ sea un número real, si

$$q(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1-4x}{x} + 3\right)^2}$$

5. Decide si el siguiente enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta

Sean a y *b* dos números reales con $a < b$ entonces $a^2 < b^2$

Ejercicios tomados del Problemario Cálculo Diferencial e Integral por publicar

6. Decide si el siguiente enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta

Sean a y *b* dos números reales con $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$

7. Decide si el siguiente enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta

Sean a y *b* dos números reales con $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

8. Decide si el siguiente enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta

$\sqrt{x^2} = x$ para todo número real *x*

Ejercicios propuestos

1. Resuelve en el conjunto de los números reales las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{m}{m+2}-\frac{2m}{m-2}=\frac{1}{m^2-4}$ **b)** $2-\frac{1}{5x^2+1}=4$ **c)** $\frac{a-2}{a+3}=\frac{a+1}{a+4}$

2. Resuelve en el conjunto de los números reales las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{x-3}=4$ **b)** $\frac{\sqrt{x+1}\,(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}=1$ **c)** $\frac{3x}{\sqrt{5-2x}}-5\sqrt{5-2x}=0$

3. Resuelve en el conjunto de los números reales las inecuaciones planteadas

a) $8y^4-3y^2<0$ **b)** $m^4-10m^2<-9$ **c)** $z^4>-z$ **d)** $x^3+x^2-17x+15\geq 0$

4. A continuación se dan algunas afirmaciones acerca de las propiedades de las relaciones de orden. Indica cuáles son verdaderas y cuáles falsas. En caso de que sean falsas enuncia la propiedad correcta.

a) Si a y *b* son dos números reales con $a<b$ entonces $a+c<b+c$ para todo número real *c*.

b) Si a, *b* y *c* son dos números reales con $a<b$ y $c>0$ entonces $ac<bc$.

c) Si a y *b* son dos números reales con $a<b$ entonces $ac<bc$ para todo número real *c*.

d) $\{x\in R\,/\,x<-2 \quad ó \quad x\geq 1\}=\{x\in R\,/\,x<-2\}\cap\{x\in R\,/\,x\geq 1\}=(-\infty,-2)\cap[1,+\infty)=(-2,1]$

e) Si a es un número real con $0<a<1$ entonces $a<a^2$.

f) Si a, *b* , *c* y *d* son números reales con $a<b$ y $c<d$ entonces $a+c<b+d$.

g) Si a es un número real con $a<0$ entonces $a^3>0$.

h) Si a es un número real con $-a>0$ entonces $a<0$.

5. Resuelve en el conjunto de los números reales las inecuaciones planteadas.

a) $\frac{m}{m+2}-\frac{2m}{m-2}\geq\frac{1}{m^2-4}$ b) $3z+\frac{2}{z-1}\leq\frac{z^2-2}{z-1}$

6. Determina los valores que debe tomar *x* para que $q(x)$ sea un número real.

a) $q(x)=\sqrt{\frac{3x-20}{5}}$ b) $q(x)=\sqrt{\frac{7-49x}{1000}}$ c) $q(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ d) $q(x)=\sqrt{\frac{4-3x}{6x}}$

7. A continuación se dan algunas afirmaciones acerca del valor absoluto. Indica cuáles son verdaderas y cuáles falsas. En caso de que sean falsas enuncia la propiedad correcta.

a) $|a|^2=a^2$ para todo número real a.

b) Si a y *b* son dos números reales entonces $|a+b|=|a|+|b|$.

c) Si a y *b* son dos números reales con $b>0$ entonces $|x+a|>b\Leftrightarrow -b>x+a>b$

d) Si a y *b* son dos números reales con $b>0$ entonces $|x+a|<b\Leftrightarrow -b<x+a<b$

8. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son correctas?

a) $|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **b)** $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{3}-\sqrt{5}$

c) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ **d)** $|3-\pi|=3-\pi$

9. Resuelve en el conjunto de los números reales las ecuaciones planteadas.

a) $|5x-6|=\frac{3}{2}$ **b)** $|x+2|=6$ **c)** $|3x+1|=5$ **d)** $\left|5x-\frac{1}{2}\right|=0$ **e)** $|2-x^2|=0$

10. Resuelve en el conjunto de los números reales las inecuaciones planteadas.

a) $|4x-2|<2$ **b)** $|3-x|\leq-\frac{5}{6}$ **c)** $|x^3-x^2+\sqrt{3}|>-0{,}1$ **d)** $|2x+3|+5\leq 3$

e) $|x-2|<|x+7|$ **f)** $|3x-1|>|x+6|$ **g)** $|5x-10|-4x\leq 4+|x+6|$

11. Sea *x* un número real distinto de cero. Calcula $\left|\frac{x}{|x|}\right|$.

12. ¿Qué condiciones deben cumplir *x* y *y* para que $|x|=|y|$?

13. Identifica la hipótesis y la tesis en el teorema: La longitud de la diagonal de un cuadrado de lado *l* es igual a $\sqrt{2}\,l$.

14. Dado el teorema: Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles, enuncia el recíproco, el contrario, el recíproco y el contra-recíproco e indica cuáles de ellos son ciertos.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1) a) $m=-3+2\sqrt{2}$ ó $m=-3-2\sqrt{2}$ **b)** No tiene solución en R **c)** $a=-\dfrac{11}{2}$

2) a) $x=19$ **b)** $x_1=0$ y $x_2=1-\sqrt{2}$ **c)** $x=\dfrac{25}{13}$

3) a) $y\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ **b)** $m\in(-3,-1)\cup(1,3)$ **c)** $z\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$
d) $x\in[-5,1]\cup[3,+\infty)$

4) a) V **b)** V **c)** F **d)** F **e)** F **f)** V **g)** F **h)** V

5) a) $m\in\left[-3-2\sqrt{2},-2\right)\cup\left[-3+2\sqrt{2},2\right)$ **b)** $z\in(-\infty,1)$

6) a) $x\in\left[\dfrac{20}{3},+\infty\right)$ **b)** $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{7}\right]$ **c)** $x\in(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$ **d)** $x\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$

7) a) V **b)** F **c)** F **d)** V

8) a y c

9) a) $x=\dfrac{9}{10}$ ó $x=\dfrac{3}{2}$ **b)** $x=-8$ ó $x=4$ **c)** $x=\dfrac{4}{3}$ ó $x=-2$ **d)** $x=\dfrac{1}{10}$
e) $x=-\sqrt{2}$ ó $x=\sqrt{2}$

10) a) $x\in(0,1)$ **b)** No tiene solución **c)** $x\in R$ **d)** No tiene solución **e)** $x\in\left(-\dfrac{5}{2},+\infty\right)$
f) $x\in\left(-\infty,\dfrac{-5}{4}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2},+\infty\right)$ **g)** $x\in[0,+\infty)$

11) 1

12) $x=y$ o $x=-y$

13) Hipótesis: *l* es la longitud del lado de un cuadrado; Tesis: la longitud de la diagonal del cuadrado es $\sqrt{2}\,l$

14) Recíproco: Si un triángulo es isósceles entonces es equilátero; contrario: Si un triángulo no es equilátero entonces no es isósceles; contra-recíproco: Si un triángulo no es isósceles entonces es no equilátero. Son ciertos: el teorema y el contra-recíproco.

15)

$4x < 3 - 2x$ $(x-1)(x-3) > 0$ $x^2 - x + 10 > 16$ $x^2 - 2x + 2 > 0$ $\frac{3}{x+5} > 2$ $(x^2+1)(2x-3)(x-3) > 0$	$-7 < 3x + 5 \leq 3$ $5 - x^2 < 8$ $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$ $\frac{x-1}{x+1} < 0$ $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)(x+2)} \geq 0$	$(x - \sqrt[2]{3})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$ $-\frac{x+5}{2} < \frac{12+3x}{4}$ $\lvert 4 + \lvert x-1 \rvert \rvert < 10$ $x^3 - x^2 - x + 1 > 1 + (-1)$

Halla el error

- $-3^2 = 9$
- $\sqrt{(-5)^2} = -5$
- $-2x - 11 = 0 = x = -\frac{11}{2}$
- $3 \cdot -4 = -12$
- $(3+x)^3 = 27 + x^3$
- $\sqrt{3+b} = \sqrt{3} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ para todo $a, b \in R$
- $y^4 + y \Rightarrow y\left(y^3 + 1\right) = 0$
- $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$
- $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > \pm 2$
- $3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow x < \sqrt{3}$
- $\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x+4} \geq 0 = \frac{-2x-11}{(x+3)(x+4)} \geq 0$
- $(3-x)^2 = -(x-3)^2$
- $1 - (-\pi)^2 = 1 + \pi^2$
- $(2-b)^2 = 4 - b^2$
- $\frac{3}{x-2} > 1 \Rightarrow 3 > x - 2$
- $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$ para todo $x, y \in R$
- $\sqrt{9 - x^2}$ es un número real si $x \leq 3$
- $\sqrt{x+4}$ es un número real si $\sqrt{x+4} \geq 0$
- $|x| > a \Leftrightarrow -a > x > a$
- $|-x+2| = 5 \Rightarrow |-x| = 5 - 2$
- $|-x+2| = 5 \Leftrightarrow -5 \geq -x + 2 \geq 5$
- $\left|-\frac{1}{2}x + 4\right| \geq 3 \Leftrightarrow -3 \geq -\frac{1}{2}x + 4 \geq 3$
- $|x+2| = -3 \Leftrightarrow x + 2 = -3 \quad ó \quad x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = -5 \quad ó \quad x = 1$
- $\frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{2x} = \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}}{2x\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right)}$

Ejercicios Extras

1. Resuelva las siguientes desigualdades

   a) $|2x-3| < 1$.

   b) $(x-2)^2 \geq 4$.

   c) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.

   d) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$.

2. Determine si las siguientes ecuaciones tienen solución en los números reales

   a) $|x| = x + 5$.

   b) $|x| = x - 5$.

3. Halle las raices de la ecuación $x^2 - 2|x| - 3 = 0$.

4. La igualdad $|a+b| = |a| + |b|$ es cierta si y solo si ambos sumandos tienen el mismo signo. Utilice este hecho para determinar que valores de x satisfacen la ecuación

$$|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|. \tag{1}$$

5. Para cada una de las siguientes desigualdades determine el conjunto solución

   a) $|3x-5| - |2x+3| > 0$.

   b) $\left|\frac{x^2+x+1}{3x+5}\right| > 2$.

   c) $|(x-3)^2 + 5| \leq |3 - x|$.

6. Demuestre que la suma o diferencia entre un número racional α y un número irracional β es un número irracional. Sugerencia: suponga que $\alpha + \beta = \gamma$ es un número racional.

7. Encuentre los valores racionales de x para el cual $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ sea un número racional.

Practica elaborada por la Prof:
Aida Montezuma.
Ampliada por Prof
Antonio Di Teodoro. 2010